**NúMEROS REALES**

[Definición de números reales 1](#_Toc306610550)

[Clasificación 1](#_Toc306610551)

[Número racional 2](#_Toc306610552)

[Números irracionales 3](#_Toc306610553)

[Clasificación de números racionales 4](#_Toc306610554)

[Números irracionales famosos 5](#_Toc306610555)

[Construcción de raíces no exactas 5](#_Toc306610556)

[Topología 7](#_Toc306610557)

[Propiedades topológicas de la recta real 8](#_Toc306610558)

[Bibliografía 9](#_Toc306610559)

Definición de números reales

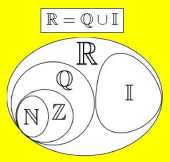
Un [**número**](http://definicion.de/numero) es la expresión de una **cantidad** con relación a su **unidad**. El término proviene del latín numĕrus y hace referencia a un **signo** o un **conjunto de signos**. La teoría de los números agrupa a estos signos en distintos grupos. Los **números naturales**, por ejemplo, incluyen al uno (1), dos (2), tres (3), cuatro (4), cinco (5), seis (6), siete (7), ocho (8), nueve (9) y, por lo general, al cero (0).

El concepto de **números reales** surgió a partir de la utilización de fracciones comunes por parte de los egipcios, cerca del año **1.000 a.C**. El desarrollo de la noción continuó con los aportes de los griegos, que proclamaron la existencia de los números irracionales. http://definicion.de/numeros-reales/.

Clasificación

Los números reales son los que pueden ser expresados por un **número entero** (3, 28, 1568) o **decimal** (4,28; 289,6; 39985,4671). Esto quiere decir que abarcan a los **números racionales** (que pueden representarse como el cociente de dos enteros con denominador distinto a cero) y los **números irracionales** (los que no pueden ser expresados como una fracción de números enteros con denominador diferente a cero).

Otra clasificación de los números reales puede realizarse entre **números algebraicos** un o de número complejo) y **números trascendentes** (un tipo de número irracional.)

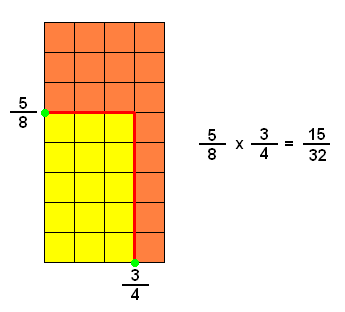


### Número racional

En [matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica), se llama **número racional** a todo [número](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero) que puede representarse como el [cociente](http://es.wikipedia.org/wiki/Cociente) de dos [números enteros](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_entero) (más precisamente, un entero y un [natural positivo](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_natural)[1](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_racional#cite_note-0) ) es decir, una [fracción común](http://es.wikipedia.org/wiki/Fracci%C3%B3n) con [numerador](http://es.wikipedia.org/wiki/Numerador) y [denominador](http://es.wikipedia.org/wiki/Denominador) distinto de [cero](http://es.wikipedia.org/wiki/Cero). El término racional alude a fracción o parte de un todo. El [conjunto](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto) de los números racionales se denota por \mathbb{Q}, que significa «cociente» (***Q****uotient* en varios idiomas europeos). Este conjunto de números incluye a los números enteros y es un subconjunto de los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real).

Definimos un número racional como un decimal finito o infinito periódico (por ejemplo, el número decimal finito 0,75 es la representación decimal del número racional 3/4. El número decimal infinito periódico 0,333... es la representación decimal del número racional 1/3). El número racional permite resolver ecuaciones del tipo ax = b, cuando a y b son [números enteros](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_entero) (con «a» distinto de cero).

Los números racionales cumplen la propiedad arquimediana o de densidad, esto es, para cualquier pareja de números racionales existe otro número racional situado entre ellos, propiedad que no estaba presente en los números enteros, por lo que los números racionales son *densos* en la [recta](http://es.wikipedia.org/wiki/Recta) de los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real).



### Números irracionales

En [matemáticas](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1ticas), un **número irracional** es cualquier [número real](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real) que no es [racional](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_racional), es decir, es un número que no puede ser expresado como una fracción \frac{m}{n}, donde *m* y *n* son [enteros](http://es.wikipedia.org/wiki/Enteros), con *n* diferente de cero y donde esta fracción es [irreducible](http://es.wikipedia.org/wiki/Fracci%C3%B3n_irreducible). Tras distinguir los números componentes de la [recta real](http://es.wikipedia.org/wiki/Recta_real) en tres categorías: ([naturales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_natural), [enteros](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_entero) y [racionales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_racional)), podría parecer que ha terminado la clasificación de los números, pero aun quedan "huecos" por rellenar en la recta de los números reales. Los números irracionales son los elementos de dicha recta que cubren los vacíos que dejan los números racionales.

Los números irracionales son los elementos de la recta real que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas. De este modo, puede definirse al número irracional como un decimal infinito no periódico. En general, toda expresión en números decimales es solo una aproximación en números racionales al número irracional referido, por ejemplo, el número racional 1,4142135 es solo una aproximación a 7 cifras decimales del número irracional [raíz cuadrada de 2](http://es.wikipedia.org/wiki/Ra%C3%ADz_cuadrada_de_2), el cual posee infinitas cifras decimales no periódicas.

Entonces, decimos con toda propiedad que el número raíz cuadrada de dos es *aproximadamente* igual a 1,4142135 en 7 decimales, o bien es *igual* a 1,4142135… donde los tres puntos hacen referencia a los infinitos decimales que hacen falta y que jamás terminaríamos de escribir.



### Clasificación de números racionales

Números Racionales Positivos: son aquellos que están representados por fracciones positivas. El conjunto de numero racionales positivos se designa con Q+

+a a Q+ - a b a Q+

+b b - b b

!Números Racionales Negativos: son aquellos que están representados por fracciones negativas. El conjunto de números racionales negativos se designa con Q-

- a a Q- - a b a Q-

b b - b b

\* El racional 0 está formado por todas las fracciones que tienen el numerador 0

ø 0 , 0 ø

* 2

\* En el conjunto de los números racionales siempre podemos intercalar otro racional, esto se llama Densidad en Q. Para intercalar racionales usamos un método practico:

1.- se ordenan de mayor a mayor.

2.- se suman los numeradores y denominadores entre sí.

La fracción obtenida está entre las fracciones dadas, el proceso puede continuar infinitamente. Entre dos números racionales podemos intercalar un numero infinito de racionales, entonces se puede decir que el conjunto Q es un conjunto denso.

Entre 1 a " 1 a

* 4

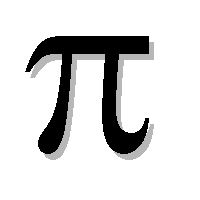
1 a < 1 a

5 4

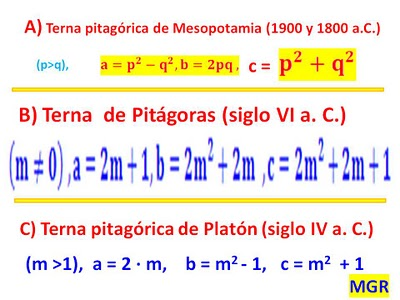
1 + 1

5 + 4

### Números irracionales famosos

1. π ([Número "pi"](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_pi) 3,14159 ...): razón entre la longitud de una [circunferencia](http://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia) y su [diámetro](http://es.wikipedia.org/wiki/Di%C3%A1metro). 
2. e ([Número "e"](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_e) 2,7182 ...): \lim _{n \to +\infty} \left( 1 + \frac {1}{n}\right) ^{n} 
3. Φ ([Número "áureo"](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo) 1,6180 ...): \frac{1 + \sqrt{5}}{2} 

### Construcción de raíces no exactas

****

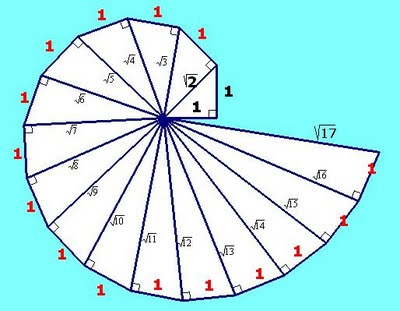
Espiral de Teodoro

**Teodoro de Cirene**, fue un filósofo y matemático griego, nacido en [Cirene](http://es.wikipedia.org/wiki/Cirene) (hoy en día [Shahhat](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Shahhat&action=edit&redlink=1), [Libia](http://es.wikipedia.org/wiki/Libia)), desarrollador de la teoría de los números irracionales, que no debe confundirse con el filósofo [cirenaico](http://es.wikipedia.org/wiki/Escuela_cirenaica) [Teodoro, el Ateo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teodoro,_el_Ateo).

Alumno de [Protágoras](http://es.wikipedia.org/wiki/Prot%C3%A1goras) y uno de los profesores de [Teeteto](http://es.wikipedia.org/wiki/Teeteto) y [Platón](http://es.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3n), vivió la mayor parte de su vida en [Atenas](http://es.wikipedia.org/wiki/Antigua_Atenas), donde tuvo contactos con Platón, quien le consagró su diálogo [*Teeteto*](http://es.wikipedia.org/wiki/Teeteto) (Teeteto era discípulo de Teodoro), y [Sócrates](http://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3crates). Trabajó en campos tan diversos como la [filosofía](http://es.wikipedia.org/wiki/Filosof%C3%ADa), la [astronomía](http://es.wikipedia.org/wiki/Astronom%C3%ADa), la [aritmética](http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica), la [música](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%BAsica) y la [educación](http://es.wikipedia.org/wiki/Educaci%C3%B3n).

Los primeros pasos de la espiral de Teodoro de Cirene.

[Pitagórico](http://es.wikipedia.org/wiki/Pitag%C3%B3rico), creía que la alegría y el juicio eran la base para llegar a la [felicidad](http://es.wikipedia.org/wiki/Felicidad). Es conocido sobre todo por su trabajo matemático, donde probó la [irracionalidad](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_irracional) de las raíces de los números enteros no cuadrados (2, 3, 5...) al menos hasta 17 a base del método tradicional pitagórico de usar la [reducción al absurdo](http://es.wikipedia.org/wiki/Reducci%C3%B3n_al_absurdo) y llegar a una inconsistencia relacionada con pares e impares.[1](http://es.wikipedia.org/wiki/Teodoro_de_Cirene#cite_note-0) . También desarrolló la espiral que lleva su nombre usando el [Teorema de Pitágoras](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras) y añadiendo perpendicularmente a un segmento una unidad lo que forma triángulos cuyas hipotenusas son las sucesivas raíces gráficamente.

****

### Topología

La **Topología** (del [griego](http://es.wikipedia.org/wiki/Idioma_griego) τόπος, “lugar”, y λόγος, “estudio”) es la rama de las [matemáticas](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1ticas) dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas.[1](http://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa#cite_note-0) Es una disciplina que estudia las propiedades de los [espacios topológicos](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_topol%C3%B3gico) y las [funciones continuas](http://es.wikipedia.org/wiki/Continuidad_%28matem%C3%A1tica%29). La Topología se interesa por conceptos como *proximidad*, *número de agujeros*, el tipo de *consistencia* (o *textura*) que presenta un objeto, comparar objetos y clasificar, entre otros múltiples atributos donde destacan [conectividad](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_conexo), [compacidad](http://es.wikipedia.org/wiki/Compacto), [metricidad o metrizabilidad](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_m%C3%A9trico), etcétera.

Los matemáticos usan la palabra *topología* con dos sentidos: informalmente es el sentido arriba especificado, y de manera formal se refieren a una cierta familia de [subconjuntos](http://es.wikipedia.org/wiki/Subconjunto) de un [conjunto](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto) dado, familia que cumple unas reglas sobre la unión y la intersección. Este segundo sentido puede verse desarrollado en el artículo [espacio topológico](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_topol%C3%B3gico).

Se suelen considerar principalmente tres ramas:

* la [Topología General](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Topolog%C3%ADa_general&action=edit&redlink=1) o Conjuntista,
* la [Topología Algebraica](http://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa_algebraica) y
* la [Topología Diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa_diferencial).

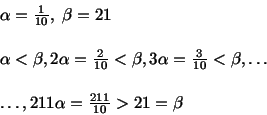
Además de estas tres ramas, que podríamos decir propiamente topológicas, la implicación en mayor o menor medida en otras disciplinas matemáticas hacen que muchos consideren parte de la Topología al [Análisis Funcional](http://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_funcional), la [Teoría de la Medida](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_la_medida), la [Teoría de Nudos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_nudos) (parte de la [Topología de dimensiones baja](http://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa_geom%C3%A9trica)), la [Teoría de Grupos Topológicos](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_topol%C3%B3gico), etc. Es fundamental su contribución a la [Teoría de Grafos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_Grafos), [Análisis Matemático](http://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_matem%C3%A1tico), [Ecuaciones Diferenciales](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial), [Ecuaciones Funcionales](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ecuaciones_Funcionales&action=edit&redlink=1), [Variable Compleja](http://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_complejo), [Geometría Diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial), [Geometría Algebraica](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_algebraica), [Álgebra Conmutativa](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_conmutativa), [Estadística](http://es.wikipedia.org/wiki/Estad%C3%ADstica), [Teoría del Caos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_del_Caos), [Geometría Fractal](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_fractal)... Incluso tiene aplicaciones directas en [Biología](http://es.wikipedia.org/wiki/Biolog%C3%ADa), [Sociología](http://es.wikipedia.org/wiki/Sociolog%C3%ADa), etc.

### Propiedades topológicas de la recta real

Conjunto arquimediano

Dados dos números racionales http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img48.gify http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img49.gif, siempre existe un n natural tal que http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img50.gif.   Esto quiere decir que por pequeño que sea http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img52.gif, si consideramos la sucesión de racionales http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img51.gif, llegará un momento en que sobrepasasaremos a http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img49.gif, por muy grande que este sea.

**Por ejemplo:**



Esta es una propiedad que también poseían los números naturales y los enteros.

DENSIDAD DE LA RECTA REAL

Dados dos números racionales distintos, , siempre existe otro número racional tal que .

Para ello, si  http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img46.gif  , con  b y d positivos, basta con tomar http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img47.gif  
  
**Ejercicio:** probar que efectivamente http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img45.gif (por ejemplo, entre  3/5 y 2/3 se encuentra 5/8)

Ahora bien, reiterando el proceso de intoducir un racional entre cada dos racionales distintos es claro que entre dos racionales distintos existen infinitos racionales distintos,

Por ejemplo, ahora entre 3/5 y 5/8 se encuentra 8/13, entre 3/5 y 8/13 se encuentra 11/18, etc., tenemos asi 3/5 < ...... < 11/18 < 8/13 < 5/8 < 2/3.

por eso se dice que el conjunto de los racionales es un conjunto denso. No tiene sentido hablar del racional siguiente o anterior a uno dado. Esto es algo que no ocurría ni en el conjunto de los naturales ni en el de los enteros.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Ordenado** | **Denso** | **Numerable** | **Estructura algebraica** |
| http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img6.gif | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif |  | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif | +   Semigrupo  \*   Semigrupo |
| http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img37.gif | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif |  | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif | +      Grupo  \*      Semigrupo  +,\*   Anillo conmut. con1 |
| http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img40.gif | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif | +      Grupo  \*      Grupo  +,\*   Cuerpo conmut. |
| http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img58.gif | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif |  | No tiene estructura algebraica al no ser cerrado para + y \* |
| http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/img59.gif | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif | http://wmatem.eis.uva.es/%7Ematpag/CONTENIDOS/Reales/reales_archivos/amaizbu1.gif |  | +      Grupo  \*      Grupo  +,\*   Cuerpo conmut. |

### Bibliografía

Definición de números reales: <http://definicion.de/numeros-reales/>.

Clasificación de números reales: Wikipedia

Número racional: Wikipedia

Número irracional: Wikipedia

Clasificación de números irracional: Wikipedia

Números irracionales famosos: Wikipedia

Espiral de Teodoro: Wikipedia

Topología: Wikipedia

Propiedades topológicas de la recta real y densidad de la recta real:   
 <http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Reales/marco_reales.htm>